SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

*Davide Guidetti*

# PROBLEMI AL CONTORNO PER EQUAZIONI PARABOLICHE DI ORDINE SUPERIORE NELLA VARIABILE TEMPORALE

12 marzo 1992

Scopo di questo seminario è illustrare alcuni risultati da me ottenuti recentemente nello studio dei problemi al contorno per equazioni paraboliche nel senso di Petrovskiy . In questo settore si possono distinguere, grosso modo, due tipi di risultati:
a) risultati di "regolarità massimale", cioè di isomorfismo vettoriale e topologico tra spazi funzionali indotti dagli operatori;
b) risultati che si rifanno alla teoria dei semigruppi analitici, meno precisi dei primi ma che mettono maggiormente in rilievo le proprietà regolarizzanti tipiche dei problemi parabolici.
Il primo tipo di risultati si può,ad esempio, trovare nei lavori [AV], [GR], [PU]. Lavori che privilegiano risultati del secondo tipo sono invece, ad esempio, [LA], [0B], [TA]. Quest'ultimo lavoro in particolare sembra contenere i risultati più generali. Tali risultati risultano tuttavia per vari aspetti non completamente soddisfacenti: innanzi tutto, le condizioni iniziali richieste ai dati non sono le più naturali ; in secondo luogo le condizioni di regolarità richieste ai coefficienti sono eccessivamente onerose; in terzo luogo, non si considerano condizioni al contorno in cui compaiano derivate temporali della soluzione. Il metodo proposto in [GU1] sembra da questo punto di vista fornire risultati migliori.
Cominciamo allora la nostra esposizione richiamando la definizione di sistema ellittico nel senso di Petrovskiy;

**Definizione 1.** Sia $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ un operatore differenziale lineare del tipo $\mathfrak{A}(t,x,\partial_t,\partial_x) = \Sigma_{k=0}^{\ell} A_{\ell-k}(t,x,\partial_x)\partial_t^k$ a coefficienti continui e limitati su $[0, T]\times\bar{\Omega}$ con $T \in ]0,+\infty[$, $\Omega$ aperto limitato "regolare" in $\mathbb{R}^n$. Diremo che $\mathfrak{A}$ è d- parabolico nel senso di Petrovskiy ($d \in \mathbb{N}$) se :
1) ord $A_j(t,x,\partial_t,\partial_x) \le jd$ per $j = 0,..., \ell$;
2) indicata con $A_j^{\#}$ la parte di ordine dj di $A_j$, è $\Sigma_{k=0}^{\ell} A_{\ell-k}^{\#}(t,x,i\xi)\lambda^k \neq 0$ per ogni $(t,x) \in [0, T]\times\bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ con Re $\lambda \ge 0$ e $(\lambda,\xi) \neq (0,0)$.

Si verifica facilmente che se $\mathfrak{A}$ è parabolico nel senso di Petrovskiy la funzione $A_0(t,x)$ non si annulla mai e si può perciò supporre costantemente uguale a 1, mentre l'operatore $A_\ell(t,x,\partial_x)$ è necessariamente ellittico in $\bar{\Omega}$. Perciò, per $\ell = 1$ si ritrovano i consueti operatori parabolici. Esempi con $\ell > 1$ sono gli operatori del tipo $(\partial_t - \Delta_x)^r$, con $r \ge 2$. Nello studio delle equazioni dinamiche di Von Karman intervengono gli operatori del tipo $\partial_t^2 - \alpha\,\Delta_x\partial_t + \Delta_x^2$ con $\alpha \ge 0$, che sono del tipo voluto se $\alpha > 0$. Vediamo ora quali sono gli spazi funzionali "naturali" per questo tipo di operatore.

Data l'equazione $\mathfrak{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x)$ è ovviamente piuttosto naturale porre $u_0 := u$, $u_1 := \partial_t u, \ldots, u_{\ell-1} := \partial_t^{\ell-1} u$ e ottenere il sistema

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_0 = u_1,\\
&\ldots\\
(1)\qquad &\partial_t u_{\ell-2} = u_{\ell-1},\\
&\partial_t u_{\ell-1} = -\Sigma_{k=0}^{\ell-1}\ A_{\ell-k}(t,x,\partial_x)u_k + f(t,x).
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che (1) è della forma (posto $U:=(u_0,\ldots,u_{\ell-1})$ e $F(t,x):= (0,\ldots,f(t,x)))$

$$\partial_t U = \mathbf{A}(t,x,\partial_x)U + F(t,x)$$

ove $\mathbf{A}(t,x,\partial_x)$ è un sistema ellittico nel senso di Douglis- Nirenberg. Ricordiamo che ciò significa quanto segue: indichiamo con $\pi A(t,x,\xi)$ la parte principale del polinomio in $\xi$ det $\mathbf{A}(t,x,\xi)$ ; si ha $\pi A(t,x,\xi) \neq 0$ per ogni $(t,x) \in [0, T]x\ \overline{\Omega}$. Inoltre esistono dei numeri interi $s_0, \ldots, s_{\ell-1}$ , $t_0,\ldots,t_{\ell-1}$ tali che ord $\mathbf{A}_{ij}(t,x,\partial_x)$ (operatore applicato a $u_j$ nella i-esima equazione) è minore o uguale a $s_i + t_j$ e, se indichiamo con $\mathbf{A}_{ij}{}^{\#}$ la parte di ordine $s_i + t_j$ di $\mathbf{A}_{ij}$ , $\pi A(t,x,\xi) = \det(\mathbf{A}_{ij}{}^{\#}(t,x,\xi))$. Dalla teoria ellittica sappiamo allora che, con opportune condizioni al contorno, la norma della soluzione U di un problema al contorno in $W^{t_0,p}(\Omega)x\ldots xW^{t_{\ell-1},p}(\Omega)$ è controllabile con la norma del dato F in $W^{-s_0,p}(\Omega)x\ldots xW^{-s_{\ell-1},p}(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$. Nel nostro caso, $s_i = -d(\ell-1-i)$, $t_j = d(\ell-j)$ $(0 \le i,j \le \ell-1)$. Si può verificare che necessariamente d è pari. Poniamo allora $2m:=d\ell$. Una scelta naturale dello spazio base é perciò

$Y := W^{-s_0,p}(\Omega)x\ldots xW^{-s_{\ell-1},p}(\Omega) = W^{2m-d,p}(\Omega)x\ldots xW^{d,p}(\Omega)xL^p(\Omega)$

e si può pensare (nel caso di condizioni al contorno omogeneo ) di lavorare con una famiglia di operatori A(t) definiti su sottospazi chiusi di $X = W^{t_0,p}(\Omega)x\ldots xW^{t_{\ell-1},p}(\Omega) = W^{2m,p}(\Omega)x\ldots xW^{2d,p}(\Omega)xW^{d,p}(\Omega)$. Veniamo ora alle condizioni al contorno. Il sistema ellittico $\mathbf{A}(t,x,\partial_x)$ ha ordine 2m (cioè, il grado del polinomio det $\mathbf{A}(t,x,\xi) = 2m$ ). E' dunque naturale considerare m condizioni al contorno, vale a dire richiedere che U (limitandosi a considerare problemi al contorno omogenei) soddisfi per $\mu = 1,\ldots,m$

$\gamma(\Sigma_{k=0}^{\ell-1}\ \mathfrak{B}_{\mu k}(t,x,\partial_x)u_k) = 0$ ($\gamma$ = operatore di traccia).

Avendo in mente di applicare la teoria ellittica di Agmon-Douglis-Nirenberg, è a questo punto conveniente supporre ord $\mathfrak{B}_{\mu k}(t,x,\partial_x) \le r_\mu + t_k = r_\mu + 2m - dk$ $(\sigma_\mu \in \mathbf{Z})$, con la convenzione che $\mathfrak{B}_{\mu k}(t,x,\partial_x) = 0$ se $\sigma_\mu + 2m - dk < 0$; affinchè $\mathfrak{B}_{\mu k}(t,x,\partial_x) \neq 0$ almeno per $k = 0$ e tenuto conto che $U \in X$, sarà anche necessario supporre $-2m \le r_\mu \le -1$, e quindi, posto $\sigma_\mu := r_\mu + 2m$, $0 \le \sigma_\mu \le 2m-1$.

Infine avendo in mente di provare che la restrizione di $\mathbf{A}(t,x,\partial_x)$ a

$\{U \in X \mid$ per $\mu = 1,\dots, m\ \gamma( \Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathcal{B}_{\mu k}(t,x,\partial_x)u_k ) = 0 \}$è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in Y, si può introdurre (ricordando il caso $\ell = 1$) la seguente condizione complementare dipendente da un parametro, analoga alla condizione di Agmon nel caso $\ell = 1$:

(CC) indichiamo con $\mathcal{B}_{\mu k}^{\#}$ la parte di ordine $\sigma_\mu$ - dk di $\mathcal{B}_{\mu k}$. Consideriamo per ogni $t \in [0, T]$, $x' \in \partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$ con Re $\lambda \geq 0$, $\xi'$ tangente a $\partial\Omega$ in x', con $(\lambda,\xi') \neq (0,0)$, $\nu(x')$ versore normale interno in x' a $\partial\Omega$ il problema di equazioni differenziali ordinarie
$\mathcal{A}^{\#} (t, x', \lambda, i\xi' + \nu(x')\partial_\tau)\ v(\tau) = 0$ in $\mathbb{R}$,
$\Sigma_{k=0}^{\ell-1}\ \lambda^k \mathcal{B}_{\mu k}^{\#}(t,x', i\xi' + \nu(x')\partial_\tau)v(0) = g_\mu$ , $\mu = 1,\dots,m$.
Tale problema ha un'unica soluzione limitata su $\mathbb{R}^+$ per ogni scelta di $g_1,\dots,g_m \in \mathbb{C}$.
Supponiamo allora che i coefficienti di $\mathcal{A}$ e dei $\mathcal{B}_{\mu k}$ non dipendano da t. Ci poniamo il seguente problema. Ammettendo un'opportuna regolarità dei coefficienti, l'operatore A in Y così definito :
$D(A):= \{U = (u_0,\dots,u_{\ell-1}) \in X \mid$ per $\mu = 1,\dots,m\ \gamma( \Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathcal{B}_{\mu k}(x,\partial_x)u_k ) = 0\}$,
$AU:= \mathbb{A}(x,\partial_x)U$
è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in Y ?
Si verifica facilmente che, in generale, la risposta è negativa. Supponiamo infatti che per qualche $\mu' \in \{1,\dots, m\}$ $\sigma_\mu < 2m - d$ (si osservi che ciò può accadere solo se $\ell \geq$ 2). Allora, sicuramente $D(A) \subseteq \{U \in Y \mid \gamma( \Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathcal{B}_{\mu' k}(x,\partial_x)u_k ) = 0\}$
che è un sottospazio chiuso di Y. Si osservi che, poichè Y è riflessivo, ciò impedisce di avere una stima "ottimale" del risolvente di A in un settore.
Ad esempio: consideriamo il problema seguente :

$$\partial_t^2 u - \alpha\Delta\partial_t u + \Delta^2 u = 0 \text{ in } [0, T] \times \Omega\ (\alpha>0)$$
$$\gamma u = 0$$
$$(2) \qquad \gamma\Delta u = 0$$
$$u(0,x) = U_0(x)$$
$$\partial_t u(0,x) = U_1(x).$$

In questo caso, si ha $\ell = 2$, m = 2. Posto $U=(u,\partial_t u) = (u_0,u_1)$, si ottiene il sistema

$\partial_t u_0 = u_1$,
$\partial_t u_1 = - \Delta^2 u_0 + \alpha\Delta u_1$,
$\gamma u_0 = \gamma\Delta u_0 = 0$,
$u_0(0,x) = U_0(x)$,

$u_1(0,x) = U_1(x)$.

Si ha $Y = W^{2,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$, $X = W^{4,p}(\Omega) \times W^{2,p}(\Omega)$.

Poniamo $D(A) = \{U = (u_0, u_1) \in X \mid \gamma(u_0) = \gamma(\Delta u_0) = 0\}$. E' chiaro che la chiusura di $D(A)$ in Y è contenuta in $\{(u_0, u_1) \in Y \mid \gamma(u_0) = 0\}$. Dunque, l'operatore $A: D(A) \to Y$, $A(u_0,u_1) = (u_1, -\Delta^2 u_0 + \alpha\Delta u_1)$ non è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in Y.

Concentriamoci allora preliminarmente sul caso $\sigma_\mu \geq 2m - d$ per ogni $\mu$. Vale allora il seguente risultato:

**Proposizione 2.** Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera di classe $C^{2m}$. Sia poi $\mathfrak{A}(x,\partial_t,\partial_x)$ un operatore d-parabolico nel senso di Petrovskiy, con $d\ell = 2m$. Sia $\mathbf{A}(x,\partial_x)$ il sistema ellittico in $\Omega$ costruito nel modo suddetto. Consideriamo, per $\mu = 1,\dots,m$, $k = 0,\dots,\ell-1$ degli operatori $\mathfrak{B}_{\mu k}(x,\partial_x)$ di ordine al più uguale a $\sigma_\mu - kd$, con coefficienti di classe $C^{2m-\sigma_\mu}(\bar{\Omega})$ e supponiamo che (CC) sia soddisfatta. Supponiamo infine $2m - d \leq \sigma_\mu \leq 2m - 1$ per ogni $\mu$. Allora, l'operatore

$D(A) := \{U = (u_0,\dots,u_{\ell-1}) \in X \mid \gamma(\Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathfrak{B}_{\mu k}(x,\partial_x)u_k) = 0$, per $\mu = 1,\dots,m\}$

$AU = \mathbf{A}(x,\partial_x)U$,

è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in Y.

(Ricordiamo che $X = W^{2m,p}(\Omega) \times W^{2m-d,p}(\Omega) \times \dots \times W^{d,p}(\Omega)$,
$Y = W^{2m-d,p}(\Omega) \times W^{2m-2d,p}(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)$).

Quindi, ad esempio, abbiamo un risultato di generazione di semigruppo se sostituiamo in (2) a $\gamma u = 0$ una condizione del tipo $\gamma(\mathfrak{B}_0(x,\partial_x)u + \mathfrak{B}_1(x,\partial_x)\partial_t u) = 0$, con ordine di $\mathfrak{B}_0$ uguale a 2 e di $\mathfrak{B}_1$ minore o uguale a 0, oppure con ordine di $\mathfrak{B}_0$ uguale a 3 e ordine di $\mathfrak{B}_1$ minore o uguale a 1.

Vogliamo ora enunciare un risultato relativo al problema in cui i coefficienti sono dipendenti dal tempo, conseguenza tra l'altro, della proposizione 2 e dei risultati di [GU2]. Diamo prima però la definizione di soluzione stretta e di soluzione classica del problema:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)u = \Sigma_{k=0}^{\ell} A_{\ell-k}(t,x,\partial_x)\partial_t^k u = f(t,x) \text{ in } [0,T] \times \Omega \\
(3)\qquad &\gamma(\Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathfrak{B}_{\mu k}(t,x,\partial_x)\partial_t^k u) = 0, \text{ per } \mu = 1,\dots,m, \\
&u(0,x) = U_0(x), \\
&\dots \\
&\partial_t^{\ell-1} u(0,x) = U_{\ell-1}(x),
\end{aligned}$$

con $f \in C([0,T]; L^p(\Omega))$, $U_0 \in W^{2m-d,p}(\Omega), \dots, U_{\ell-1} \in L^p(\Omega)$.

Una soluzione stretta è un'applicazione $u \in C^{2m}([0, T]; L^p(\Omega)) \cap C^{2m-1}([0,T]; W^{d,p}(\Omega)) \cap \ldots \cap C^1([0, T]; W^{2m-d,p}(\Omega)) \cap C([0, T]; W^{2m,p}(\Omega))$ soddisfacente (3). Si osservi che l'esistenza di una soluzione stretta implica $U_0 \in W^{2m,p}(\Omega), \ldots, U_{\ell-1} \in W^{d,p}(\Omega)$ e le condizioni di raccordo

(4) $\gamma( \Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathcal{B}_{\mu k}(0,x,\partial_x)U_k ) = 0$, per $\mu = 1,\ldots,m$.

Una soluzione classica è un' applicazione $u \in C^{2m}(]0, T]; L^p(\Omega)) \cap C^{2m-1}(]0,T]; W^{d,p}(\Omega)) \cap \ldots \cap C^1(]0, T]; W^{2m-d,p}(\Omega)) \cap C(]0, T]; W^{2m,p}(\Omega)) \cap C^{2m-1}([0, T]; L^p(\Omega)) \cap C^{2m-2}([0,T]; W^{d,p}(\Omega)) \cap \ldots \cap C([0, T]; W^{2m-d,p}(\Omega))$ soddisfacente le prime due condizioni di (3) solo per $0 < t \leq T$.
Si osservi che l'eventuale esistenza di soluzioni classiche mette in luce le proprietà regolarizzanti del problema.
Vale il seguente risultato:

**Proposizione 3.** Supponiamo che per ogni $t \in [0, T]$ l'operatore $\mathcal{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ con le condizioni iniziali $\gamma( \Sigma_{k=0}^{\ell-1} \mathcal{B}_{\mu k}(t, x,\partial_x)\partial_t^k u ) = 0$, per $\mu = 1,\ldots,m$, soddisfi le ipotesi della proposizione 2, con d, $\ell$, $\sigma_\mu$ $(1 \leq \mu \leq m)$ indipendenti da t (si osservi in particolare che richiediamo $\sigma_\mu \geq 2m - d$ per ogni $\mu$).Supponiamo inoltre che i coefficienti di $\mathcal{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ siano di classe $C^\beta([0, T]; C(\bar{\Omega}))$ e i coefficienti di $\mathcal{B}_{\mu k}(t, x,\partial_x)$ di classe $C^\beta([0, T]; C^{2m-\sigma_\mu}(\bar{\Omega}))$ con $\beta > (2m - \min_\mu \sigma_\mu - p^{-1})/d$.
Allora, per ogni $f \in C^\varepsilon([0, T]; L^p(\Omega))$ $(\varepsilon > 0)$, $U_0 \in W^{2m-d,p}(\Omega), \ldots, U_{\ell-1} \in L^p(\Omega)$, (3) ha un'unica soluzione classica. Se, inoltre, $U_0 \in W^{2m,p}(\Omega), \ldots, U_{\ell-1} \in W^{d,p}(\Omega)$ e vale (4), la soluzione classica è stretta.

Per fissare le idee, vediamo un esempio: consideriamo il problema:

(5) $\mathcal{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = \partial_t^2 u(t,x) + A_1(t,x,\partial_x)\partial_t u(t,x) + A_2(t,x,\partial_x)u(t,x) = f(t,x)$ in $[0, T] \times \Omega$,

con ordine di $A_2$ uguale a 4 e ordine di $A_1$ minore o uguale a 2. Siamo dunque nel caso $\ell = 2$, $d = 2$, $2m = 4$.

Supponiamo che le condizioni al contorno siano del tipo

(6) $\gamma(\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)u + \mathcal{B}_{11}(t,x,\partial_x)\partial_t u) = 0$,
$\gamma(\mathcal{B}_{20}(t,x,\partial_x)u + \mathcal{B}_{21}(t,x,\partial_x)\partial_t u) = 0$

con ordine di $\mathcal{B}_{10}$ uguale a 2, ordine di $\mathcal{B}_{11}$ minore o uguale a 0, ordine di $\mathcal{B}_{20}$ uguale a 3 e ordine di $\mathcal{B}_{21}$ minore o uguale a 1.
Imponiamo infine le condizioni iniziali

(7) $u(0,x) = U_0(x), \partial_t u(0,x) = U_1(x).$

In questo casi $\sigma_1 = 2$, $\sigma_1 = 3$. Dunque, $(2m - \min_\mu \sigma_\mu - p^{-1})/d = (4 - 2 - p^{-1})/2 = 1 - 1/(2p)$. Perciò, se i coefficienti di $\mathcal{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ sono di classe $C^\beta([0, T]; C(\bar{\Omega}))$ e i coefficienti di $\mathcal{B}_{\mu k}(t, x,\partial_x)$ di classe $C^\beta([0, T]; C^{2m-\sigma_\mu}(\bar{\Omega}))$ con $\beta > 1 - 1/(2p)$, per ogni $f \in C^\varepsilon([0, T]; L^p(\Omega))$, $U_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, $U_1 \in L^p(\Omega)$, il problema (5)-(7) ha un'unica soluzione classica (cioè in $C(]0, T]; W^{4,p}(\Omega)) \cap C^1(]0, T]; W^{2,p}(\Omega)) \cap C^2(]0, T]; L^p(\Omega)) \cap C([0, T]; W^{2,p}(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^p(\Omega))$). Tale soluzione è stretta se inoltre $U_0 \in W^{4,p}(\Omega)$, $U_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ e valgono le condizioni di raccordo (4).
Veniamo ora al caso in cui la condizione $\sigma_\mu \geq 2m - d$ per ogni $\mu$ non è necessariamente soddisfatta. Invece di trattare il caso generale, consideriamo il problema (5)-(7) nel caso in cui ad esempio, $\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)$ abbia ordine 1 e $\mathcal{B}_{11}(t,x,\partial_x) = 0$. Consideriamo innanzi tutto il problema dell'esistenza di una soluzione stretta. Supponiamo che i coefficienti di $\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)$ siano di classe $C([0, T]; C^3(\bar{\Omega})) \cap C^1([0, T]; C^1(\bar{\Omega}))$. Se u è una soluzione stretta, $t \to \mathcal{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.)$ è di classe $C([0, T], W^{3,p}(\Omega)) \cap C^1([0, T]; W^{1,p}(\Omega))$ . Indicato con $\mathcal{B}'_{1,0}(t,x,\partial_x)$ l'operatore ottenuto derivando rispetto a t i coefficienti di $\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)$ e tenuto conto che $\gamma$ è ben definito su $W^{1,p}(\Omega)$ si ricava $\gamma(\mathcal{B}'_{1,0}(t,.,\partial_x)u(t,.) + \mathcal{B}_{10}(t,.,\partial_x)\partial_t u(t,.)) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$, da cui

$$(8) \qquad \gamma(\mathcal{B}'_{1,0}(0,.,\partial_x)U_0 + \mathcal{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_1) = 0$$

che è dunque un'ulteriore condizione di raccordo che deve essere soddisfatta dai dati iniziali. Vedremo nel seguito che questa ulteriore condizione sui dati iniziali è essenzialmente quello che manca affinchè il problema

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x) \\ &\gamma(\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)u) = 0, \\ &\gamma(\mathcal{B}_{20}(t,x,\partial_x)u + \mathcal{B}_{21}(t,x,\partial_x)\partial_t u) = 0 \\ &u(0,x) = u_0(x) \\ &\partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{aligned}$$

supposte soddisfatte le condizioni di raccordo (4), possieda una soluzione stretta.

Supponiamo poi che il problema (9) possieda una soluzione classica. Allora, $t \to \mathcal{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.) \in C([0, T]; W^{1,p}(\Omega))$; ciò implica che, affinchè esista una soluzione classica, deve valere

(10) $\gamma(\mathcal{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_0) = 0.$

Vedremo che la condizione (10) su $U_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ assicura essenzialmente l'esistenza di una soluzione classica.
Per provare quanto in precedenza affermato, introduciamo un operatore differenziale $\Delta'$ su $\partial\Omega$, del secondo ordine fortemente ellittico, con coefficienti di classe $C^{2m}(\partial\Omega)$. Un operatore di questo tipo può essere facilmente costruito per carte locali. Si verifica abbastanza facilmente che l'operatore B così definito:
$D(B) = W^{2,p}(\partial\Omega)$, $Bv = \Delta'v$
è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in $L^p(\partial\Omega)$. Costruiamo poi un operatore K del secondo ordine, a coefficiente di classe $C^{2m}(\bar{\Omega})$ in modo che per ogni u sufficientemente regolare

$$\gamma(Ku) = \Delta'(\gamma u).$$

Sia $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1/2 - 1/(2p)$ e supponiamo che i coefficienti di $\mathcal{Q}(t,x,\partial_x)$ siano di classe $C^\beta([0, T]; C(\bar{\Omega}))$, i coefficienti di $\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)$ di classe $C^{1+\beta}([0, T]; C^1(\bar{\Omega})) \cap \cap C^\beta([0, T]; C^3(\bar{\Omega}))$, i coefficienti di $\mathcal{B}_{20}(t,x,\partial_x)$ e di $\mathcal{B}_{21}(t,x,\partial_x)$ di classe $C^\beta([0, T]; C^1(\bar{\Omega}))$.
Sia u una soluzione stretta di (9). Da $\gamma(\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)u) = 0$, segue $(\partial_t - \Delta')\,\gamma(\mathcal{B}_{10}(t,x,\partial_x)u) = 0$, da cui

(11) $\gamma(- K(\mathcal{B}_{10}(t,.,\partial_x)u) + \mathcal{B}'_{1,0}(t,.,\partial_x)u(t,.) + \mathcal{B}_{10}(t,.,\partial_x)\partial_t u(t,.)) = 0.$

Consideriamo allora il nuovo problema ottenuto da (9) sostituendo al posto della prima condizione al contorno la condizione (10). Si può verificare che (CC) è ancora soddisfatta, che $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ e che $\beta > (2m - \min_\mu \sigma_\mu - p^{-1})/d$ (la limitazione imposta a $\beta$ era stata scelta proprio a tale scopo). Si vede allora che, se $U_0 \in W^{4,p}(\Omega)$, $U_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ e valgono $\gamma(\mathcal{B}_{10}(0,x,\partial_x)U_0) = \gamma(\mathcal{B}_{20}(0,x,\partial_x)U_0 + \mathcal{B}_{21}(0,x,\partial_x)U_1) = 0$ e, in più, la condizione (8), tutte le ipotesi della proposizione 3 sono soddisfatte da questo nuovo problema . Verifichiamo, ad esempio, la prima condizione di raccordo; si ha

$\gamma(- K(\mathcal{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_0) + \mathcal{B}'_{1,0}(0,.,\partial_x)U_0 + \mathcal{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_1) = - \Delta'\gamma(\mathcal{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_0) +$

$+ \gamma(\mathfrak{B}'_{1,0}(0,.,\partial_x)U_0 + \mathfrak{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_1) = 0.$

Allora, in base alla proposizione 3, il problema

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\mathfrak{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x)\\
&\gamma(-K(\mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)u) + \mathfrak{B}'_{1,0}(t,.,\partial_x)u(t,.) + \mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)\partial_t u(t,.)) = 0,\\
&\gamma(\mathfrak{B}_{20}(t,x,\partial_x)u + \mathfrak{B}_{21}(t,x,\partial_x)\partial_t u) = 0\\
&u(0,x) = u_0(x)\\
&\partial_t u(0,x) = u_1(x)
\end{aligned}
$$

ha un'unica soluzione stretta u. Resta da far vedere che u è anche soluzione di (9). A tale scopo basta ovviamente verificare che $\gamma(\mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.)) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Dalla seconda equazione in (12) segue $\gamma((\partial_t - K)(\mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.))) = 0$, cioè $(\partial_t - \Delta')\gamma(\mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.)) = 0$. D'altra parte, $t \rightarrow \gamma(\mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.)) \in C^1([0, T]; L^p(\partial\Omega)) \cap C([0, T]; W^{2,p}(\partial\Omega))$ e dunque è soluzione di

$(\partial_t - B)v(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Dalla condizione iniziale $\gamma(\mathfrak{B}_{10}(0,.,\partial_x)u(0,.)) = 0$, segue $\gamma(\mathfrak{B}_{10}(t,.,\partial_x)u(t,.)) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

In maniera analoga, si può vedere che, se si suppone soltanto $U_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, $U_1 \in L^p(\Omega)$ e $\gamma(\mathfrak{B}_{10}(0,.,\partial_x)U_0) = 0$, il problema (9) ha un'unica soluzione classica.

Più, in generale, vale il seguente risultato:

**Proposizione 4.**Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi della proposizione 3, con l'eccezione della condizione $\sigma_\mu \geq 2m - d$ per ogni $\mu$ e della limitazione su $\beta$ (che preciseremo nel seguito). Supponiamo poi che

a)i coefficienti di $\mathfrak{A}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ sono di classe $C^\beta([0, T]; C(\bar{\Omega}))$ $(\beta > 0)$;

b) se $2m - rd \leq \sigma_\mu < 2m - (r - 1)d$ $(1 \leq r \leq \ell)$ i coefficienti di $\mathfrak{B}_{\mu k}$ sono di classe

$C^\beta([0, T]; C^{2m-\sigma_\mu}(\bar{\Omega})) \cap C^{1+\beta}([0, T]; C^{2m-\sigma_\mu-d}(\bar{\Omega})) \cap \ldots \cap C^{r-1+\beta}([0, T]; C^{2m-\sigma_\mu-(r-1)d}$

$(\bar{\Omega}))$;

c) per ogni $\mu = 1,\ldots,m$, se $2m - rd \leq \sigma_\mu < 2m - (r-1)d$, $\beta > [(2m - (r-1)d - \sigma_\mu - p^{-1}]/d$.

Allora, per ogni $f \in C^\varepsilon([0, T]; L^p(\Omega))$, $(U_0,\ldots,U_{\ell-1}) \in Y$, tale che, per ogni $\mu = 1,\ldots,m$, se $2m - rd \leq \sigma_\mu < 2m - (r - 1)d$ $(1 \leq r \leq \ell)$, per $j = 0,\ldots,r - 2$,

$\gamma(\sum_{k=0}^{\ell-r}\sum_{\rho=0}^{j}\binom{j}{\rho}\mathfrak{B}^{(j-\rho)}_{\mu,k}(0,.,\partial_x)U_{k+\rho}) = 0$ (nessuna condizione se $r = 1$) il problema 3 ha un'unica soluzione classica. Se, di più, $(U_0,\ldots,U_{\ell-1}) \in X$ e per $j = 0,\ldots,r - 1$

$\gamma(\sum_{k=0}^{\ell-r}\sum_{\rho=0}^{j}\binom{j}{\rho}\mathfrak{B}^{(j-\rho)}_{\mu,k}(0,.,\partial_x)U_{k+\rho}) = 0$, la soluzione classica è stretta.

**Bibliografia**

[AV] M. S. Agranovic, M. I. Visik, Russian Math. Surveys, 19, 53-157 (1964);
[GR] P. Grisvard, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 21,307-347 (1967);
[GU1] D. Guidetti, lavoro in preparazione;
[GU2] D. Guidetti, in "Semigroups theory and evolution equations" (ed. Clément, Mitidieri, De Pagter), Lecture Notes in pure and Appl. Math., Dekker (1991).
[LA] J. Lagnese, Journ. Math. Anal. Appl., 32, 15-37 (1970);
[OB] E. Obrecht, Journ. Math. Anal. Appl., 125, 508-530 (1987);
[PU] V. T. Purmonen, Math. Scand., 65, 221-244 (1989);
[TA] H. Tanabe, Journ. Diff. Eq., 73-II, 288-308 (1988).